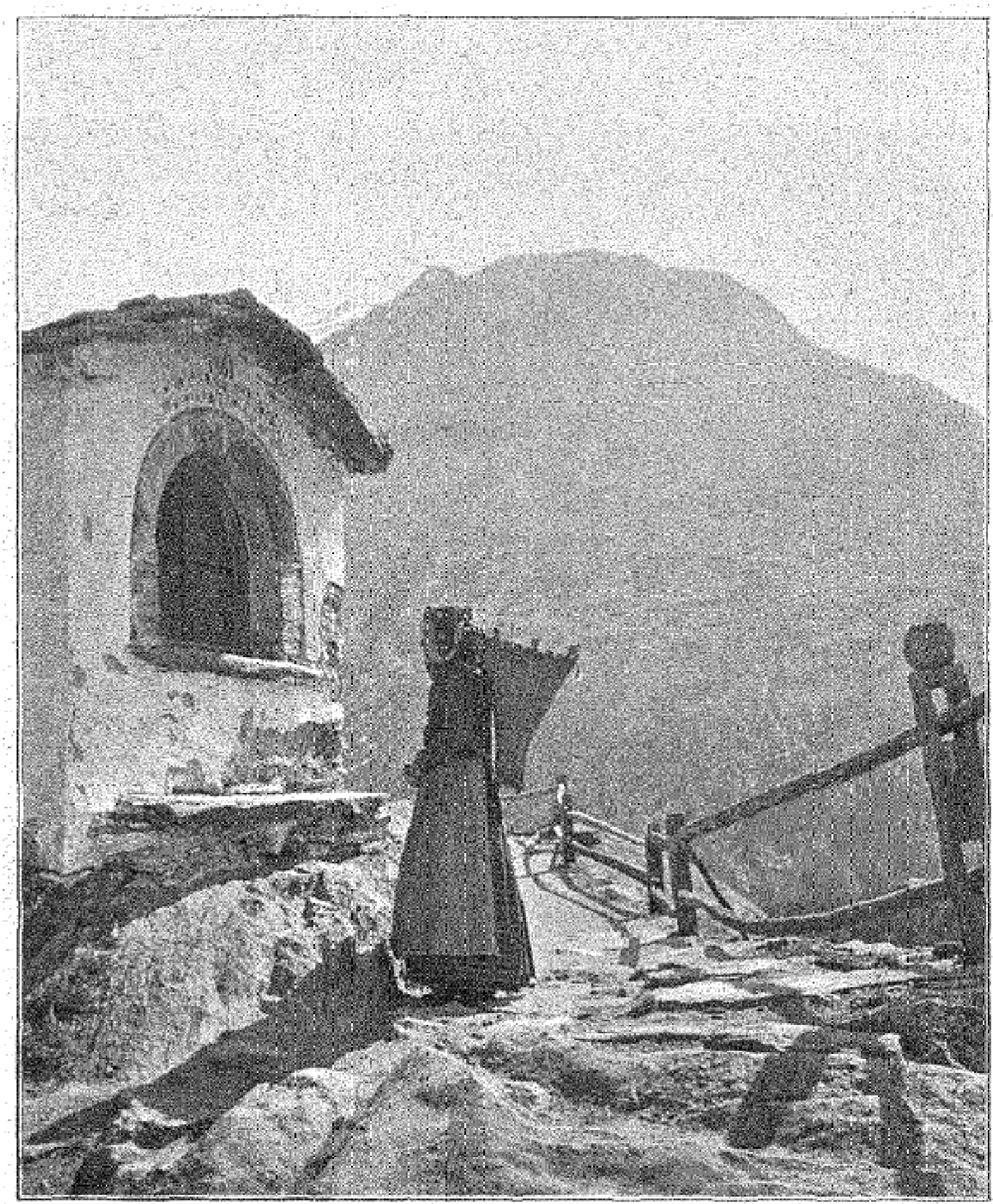


H. Wehrli † phot. Kapelle am Bergpfad.

Der Photoperspektograph und seine Anwendung.

Von Theodor Scheimpflug, k. u. k. Hauptmann und Kapitän langer Fahrt in Wien.

Auf der österreichischen Ausstellung in London ist jetzt ein Apparat zum ersten Male vor die Öffentlichkeit getreten, dessen Anfänge weit zurückreichen[1]) und welcher allem Anscheine nach berufen erscheint, der Photographie eine ganze Reihe neuer Anwendungsgebiete zu erobern.

Wie schon sein Name besagt, befaßt er sich mit der Perspektive, d. h. er dient dazu, die Perspektive gegebener Bilder zu verändern, wenn

[1]) Siehe meine Publikationen in der »Photographischen Korrespondenz« aus den Jahren 1898 und 1903. Die ersten Versuche begannen schon im Jahre 1896.

nötig, zu verbessern oder für künstlerische oder wissenschaftliche Zwecke sogar ganz umzugestalten. Derartige Apparate existieren bereits. Von selben sind am bekanntesten der Perspektograph von Ritter und der perspektivische Apparat von Hauck.

Selbe sind Zeichenapparate, die einigermaßen mit dem Pantographen verwandt sind. Sie können daher nur zur Reproduktion von Strichzeichnungen verwendet werden und haften ihnen wegen des unvermeidlichen toten Ganges große Fehler an, die ihre Eignung zu genaueren Arbeiten ganz in Frage stellen. Diese Apparate sind daher in der Praxis kaum in Gebrauch und vielen Fachleuten gar nicht bekannt. Der jetzt vorliegende Apparat hat sich aber von diesen Mängeln befreit, denn er arbeitet, wie das Beiwort »Photo« besagt, auf photographischem Wege. Er ist im Wesen ein photographischer Reproduktionsapparat und kein Pantograph und muß daher auch nach ganz anderen Gesichtspunkten beurteilt werden.

Es ist eine längst bekannte Tatsache, ohne welche die ganze photographische Meßkunst nicht möglich wäre, daß ein photographisches Objektiv in geometrischer Beziehung im strengsten Sinne wie ein mathematischer Punkt wirkt.

Die Gaußsche Linsentheorie lehrt uns, daß die Hauptstrahlen aller von den verschiedenen Punkten des Originals ausgehenden Lichtstrahlenbüschel sich beim Eintritt in das Objektiv im ersten Haupt-, respektive Knotenpunkt vereinigen und dann scheinbar vom zweiten Haupt-, respektive Knotenpunkt ausgehend, aus dem Objektiv austreten und das Bild erzeugen.

Das auf der photographischen Platte entstehende Bild ist demnach im geometrischen Sinne nichts anderes als die Schnittfigur einer Ebene mit einem Strahlenbüschel, welches vom zweiten Hauptpunkte des Objektivs ausgeht.

Die photographische Platte als das Strahlenbüschel schneidende Ebene steht im allgemeinen bei allen photographischen Apparaten senkrecht auf der optischen Achse des Objektivs und resultiert daraus die weit verbreitete Gewohnheitsvorstellung, daß das gar nicht anders sein könne.

Die Perspektive als geometrische Disziplin behandelt aber ganz allgemein die Schnitte von Ebenen mit Strahlenbüscheln, kennt keine optische Achse und daher auch keinen Zwang, ihre Ebenen auf selbe senkrecht zu stellen.

Wer also die Photographie zur Lösung allgemeiner perspektivischer Aufgaben heranziehen will, muß sich vor allem die Frage stellen: »Muß die photographische Platte unbedingt auf der optischen Achse des Objektivs senkrecht stehen?«

Sowohl die mathematische Prüfung (siehe Anhang) der allgemeinen Linsenvergleichung als auch der Versuch verneinen diese Frage. Vielmehr lehren sie uns, daß

1. innerhalb der Grenzen der Gültigkeit der allgemeinen Linsengleichung, welche ja bekanntlich nur eine Näherungsformel ist, jedes ebene Bild beliebiger Lage als ebenes Bild scharf reproduziert werden kann;

2. lehren uns wieder Rechnung (siehe Anhang) und Erfahrung, daß nur dann Bildschärfe erreicht wird, wenn die Schnittgerade zwischen der Ebene des Originals und der Ebene der Reproduktion in der Ob-

jektivebene[1]) gelegen ist. Diese Gerade heiße fortan im Sinne der Perspektive die Kollineationsachse K (Fig. 1);

3. lehren uns Rechnung (siehe Anhang) und Erfahrung, daß bei scharfer Abbildung die Schnittgeraden der Bildebenen mit den Brennebenen des Objektivs in Ebenen liegen, welche durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs zu den gegenständigen Bildebenen[2]) parallel gelegt werden. Die Perspektive nennt diese Ebenen Gegenebenen, ihre Schnittgeraden mit den Bildebenen die Gegenachsen. Dieselben spielen in der Theorie und Handhabung des hier besprochenen Apparates eine große Rolle und läßt sich der soeben ausgesprochene Satz für die Praxis kürzer so formulieren, daß die perspektivischen Gegenachsen bei scharfer Abbildung stets in den Brennebenen des Objektivs liegen müssen.

Durch den Nachweis, daß jedes photographische Objektiv geometrisch wie ein Projektionszentrum wirkt, daß sowohl das Original als die Abbildung bei der schiefen Transformation ebene Schnitte des vom

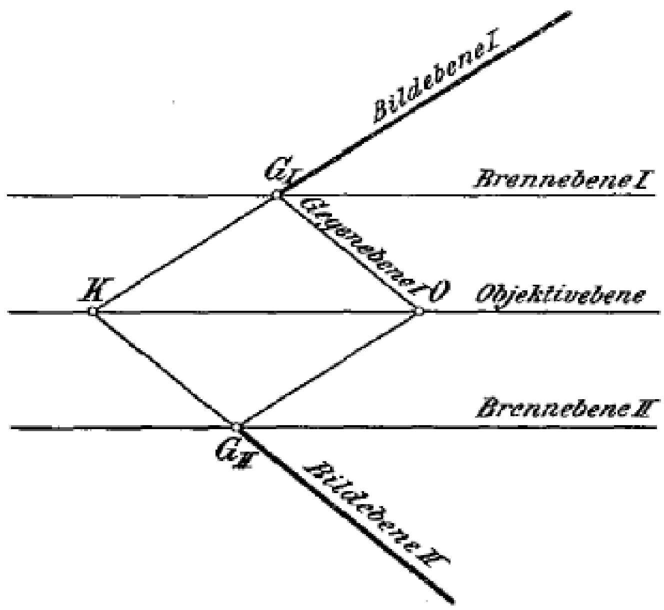


Fig. 1.

optischen Mittelpunkte ausgehenden Hauptstrahlenbüschels sind; ferners, daß die Schnittgerade der beiden Ebenen des Originals und der Abbildung, d. h. die Kollineationsachse stets in der Objektivebene, die beiden Schnittgeraden der Bild- und Gegenebene, d. h. die Gegenachsen stets in den Brennebenen des Objektivs liegen müssen, sind die Beziehungen zwischen Perspektive und Optik in der erschöpfendsten Weise klargestellt und ist damit die geistige Brücke zwischen diesen beiden Wissensgebieten geschlagen. Es lassen sich somit auf Grund dieser Erkenntnisse alle Sätze

[1]) Um den Gedankenausdruck und das Verständnis nicht unnötig zu erschweren, wird im weiteren davon abgesehen, daß nach der Gaußschen Linsentheorie jedes Linsensystem zwei Haupt-, respektive Knotenpunkte und zwei Hauptebenen besitzt und wird weiterhin bloß vom »optischen Mittelpunkte« und von der »Objektivebene« gesprochen.

[2]) Die Bezeichnung »gegenständige Bildebenen« soll sagen: Die parallel zur Bildebene I gelegte Gegenebene II ($G_{II}O$, Fig. 1) schneidet die Bildebene II in der Gegenachse G_{II}, die parallel zur Bildebene II gelegte Gegenachse I schneidet die Bildebene I in der Gegenachse G_I.

H. Wehrli † phot. Bauernmühle im Val Poschiavo.

der Perspektive sofort in die Optik übertragen und alle perspektivischen Probleme optisch, respektive photographisch lösen.[1])

Allerdings darf hier auf eine kleine Beschränkung nicht vergessen werden. In der Perspektive erstreckt sich das Strahlenbüschel nach allen Seiten. In der Optik ist ein praktisches Arbeiten nur innerhalb der Grenzen des Gesichtsfeldes möglich. In der Praxis wird man daher vielfach auf Schwierigkeiten stoßen, gegebene Aufgaben der Perspektive zu lösen.[2])

Jedoch sind diese Schwierigkeiten in den seltensten Fällen unüberwindlich. Man kann sie vielmehr durch eine planmäßige mehrfache Reproduktion in der Regel umgehen sowie auch perspektivische Aufgaben lösen, welche über die einfachen Beziehungen zwischen zwei ebenen

---

[1]) Die bisher in der Praxis einzig und allein verwendete senkrechte Abbildung ist nur ein spezieller Fall der schiefen Abbildung, bei welchem die Gegenachsen im Unendlichen liegen.

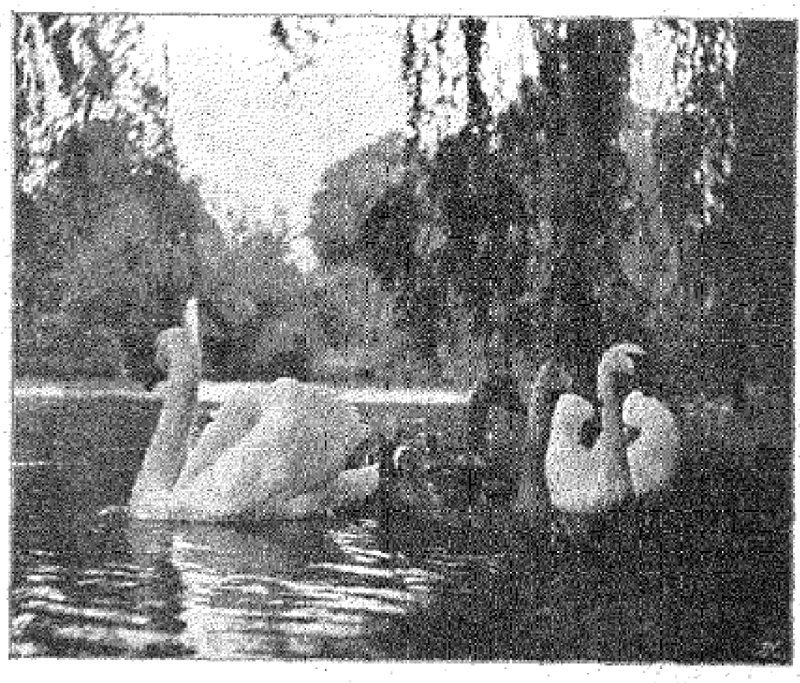
[2]) So kann man wohl anstandslos einen Kreis in eine Ellipse transformieren; bei der photographischen Verzerrung des Kreises in eine Parabel wird man nur einen Teil desselben auf die Platte bekommen, weil, wie bekannt, sich der Rest ins Unendliche erstreckt, und von der Hyperbel ist nur ein Ast erhältlich, weil der andere, allerdings kongruente und daher durch Umkopieren erreichbare, von einem Teil des Strahlenbüschels erzeugt wird, der gänzlich außerhalb des Gesichtsfeldes des Objektivs liegt. Umgekehrt kann man natürlich auch eine Ellipse anstandslos in einen vollen Kreis zurückführen, die Parabel und je ein Hyperbelast geben aber nur mehr Kreisbögen.

Schnitten desselben Strahlenbüschels weit hinausgehen.[1]) Ja, man kann unter Zuhilfenahme weiterer Hilfsmittel der Photographie, insbesondere durch zielbewußte Teilung des Originals und verschiedenartiger Transformation der einzelnen Teile nach deren Wiedervereinigung die verschiedenartigsten und überraschendsten Effekte erzielen, wie z. B. die gänzliche Veränderung des Standpunktes, von dem aus eine Photographie aufgenommen wurde.

Natürlich kann der Unverständige auf diese Art ganz Unmögliches zusammenbrauen.

Dem Photoperspektographen liegt nun der konstruktive Gedanke zugrunde, die Bedingungen der Bildschärfe bei der schiefen Abbildung automatisch zu erfüllen und alle Bewegungen, welche dann nur mehr perspektivische Bildveränderungen bedingen, so zu gestalten, daß einerseits der Bereich der perspektivischen Aufgaben, welche der Apparat zu lösen gestattet, ein möglichst großer wird, anderseits alle Teile des Apparates ihre bestimmte Aufgabe und nur diese erfüllen und sich gegenseitig nicht störend beeinflussen. Leider hat der praktische Gesichtspunkt, eine möglichst sichere, vom toten Gange freie Funktion zu erzielen, dazu geführt, in den konstruktiven Beschränkungen noch weiter zu gehen, als es theoretisch nötig und nützlich wäre. Bei den bisher ausgeführten Konstruktionen können die Gegenachsen nicht ins Unendliche rücken und müssen alle Aufgaben, bei welchen die Gegenachsen zu weit hinausfallen, d. h. alle kleinen Drehungen der Bildebene bis zu etwa 25°, ebenso wie die affinen Abbildungen durch einen Doppelprozeß (Differenzwirkung) gelöst werden. Drehungen der Bildebene von 25—55° sind mit einem Male

[1]) So können z. B. affine Abbildungen, also ebene Schnitte von Strahlenbüscheln, die ihr Produktionszentrum in der Unendlichkeit haben, als Differenzwirkung durch einen Doppelprozeß erzielt werden, ohne daß dazu das Objektiv in die Unendlichkeit rücken müßte.



Peter Irό, Budapest.

möglich. Noch größere Drehungen bis über 90° wieder mit einem Doppelprozeß durch Summenwirkung.

Nachdem aber, wie schon erwähnt, und soeben an den einfachsten Beispielen gezeigt, ein großer Teil wichtiger Probleme der Praxis nur durch ein planmäßiges Aneinanderreihen mehrerer Prozesse lösbar ist, wozu voraussichtlich stets nur ein entsprechend geschulter Arbeiter befähigt sein wird, dürfte vorläufig die Solidität der Konstruktion durch diese konstruktive Beschränkung des Arbeitsbereiches nicht zu teuer erkauft sein. Es scheint vielmehr, daß das Anwendungsgebiet des Apparates auch in seiner heutigen, vom theoretischen Ideal noch weit entfernten Form noch gar nicht abgesteckt ist und selber einem mathematisch geschulten Kopf reichlich Gelegenheit zur Betätigung eröffnet.

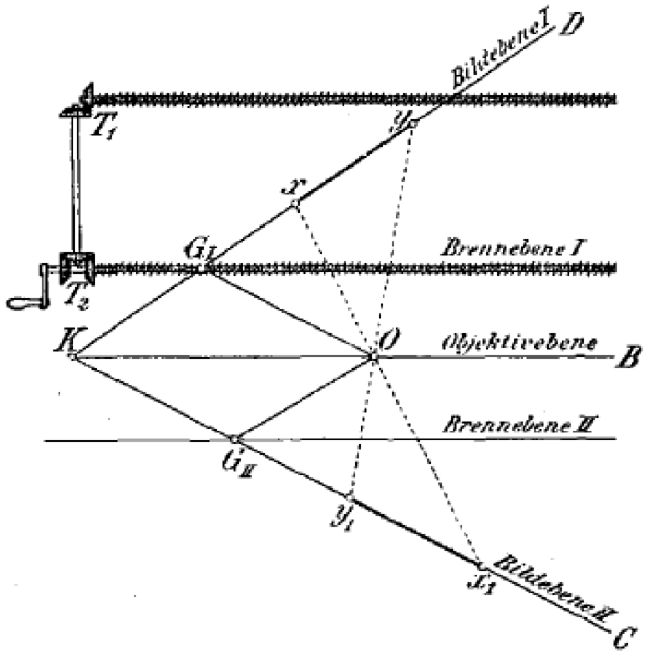
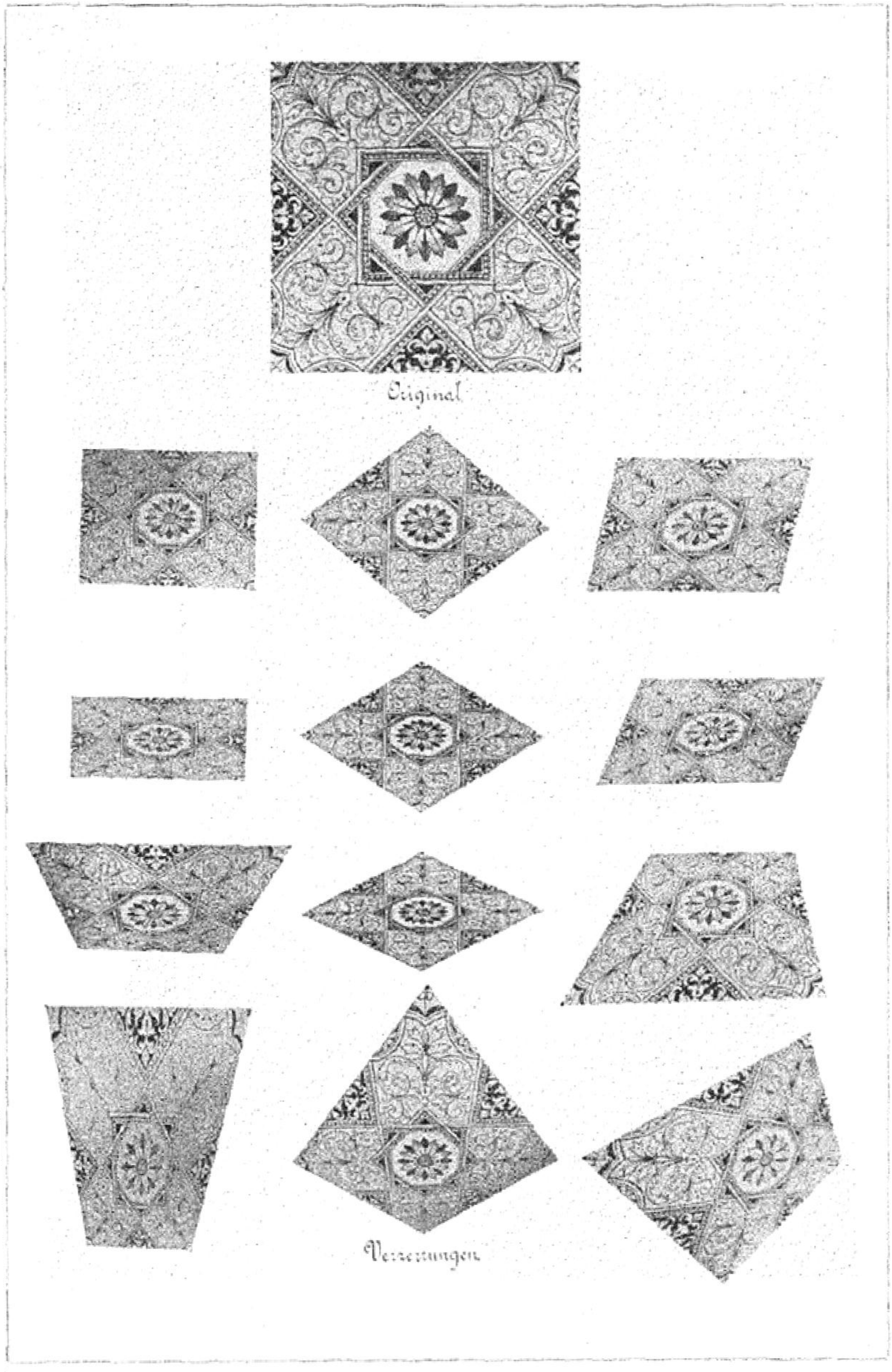


Fig. 2.

Der jetzt in London ausgestellte Apparat ist in Fig. 2 schematisch dargestellt. KBC ist der Querschnitt eines starren Holzkastens, in dessen Wand KB das Objektiv O gerade geführt wird, während die Wand KC eine Bildebene in sich schließt und einen Kreuzsupport sowie eine Drehscheibe besitzt, um die Mattscheibe respektive Kassette entsprechend verstellen zu können.

KD ist diejenige Wand, welche die zweite Bildebene in sich schließt, ebenfalls mit einem Kreuzsupport und einer Drehscheibe versehen. Diese Wand KD kann durch einen eigenen, in der Figur schematisch angedeuteten Trieb T und T_1 so bewegt werden, daß ihre »Stimmung«, d. h. die Ebene der lichtempfindlichen Schicht, stets durch die Kollineationsachse K geht, in welcher sich auch die »Objektivebene« und die »Stimmung der Wand KC« schneiden. Das Objektiv O wird hierbei von G^{I} aus durch einen Arm derart in seiner Geradführung verschoben, daß stets $OG^{\text{I}} = KC$ und $OG^{\text{II}} = KD$ bleibt.

Einige Teilungen ermöglichen die genaue, rechnerisch verfolgbare Einstellung aller Teile und machen im Vereine mit der schönen mechanischen Durchführung des Apparates durch die Firma R. A. Goldmann



Perspektivische Formveränderung des Originals.

Tafel I zu Scheimpflug: Der Photoperspektograph und seine Anwendung.

Aufnahme vom Kuppelraume aus.

Aufgerichtete Reproduktion von oben.

Deckengemälde im Stiegenhause des k. k. Naturhistorischen Hof-Museums.

Tafel II zu Scheimpflug: Der Photoperspektograph und seine Anwendung.

in Wien den Apparat zu einem Präzisionsapparat, obwohl derselbe anfangs nicht als solcher gedacht war. Mit diesem Apparate (Fig. 3) wurden, nachdem er justiert und rektifiziert worden war, mannigfache Versuche gemacht.

Vor allem wurden, um seine Leistungsfähigkeit im allgemeinen zu erproben, ohne spezielles Ziel alle möglichen Veränderungen einer menschlichen Figur und eines Spitzenmusters versucht. Dabei war es von Interesse, daß, obwohl aus der menschlichen Figur die unglaublichsten Karikaturen gemacht wurden[1]), das, was man die Ähnlichkeit nennt, nicht wesentlich litt; denn die Figur war stets als dieselbe zu erkennen. Auch bei den Mustern zeigte sich Analoges. Alle möglichen Formveränderungen ließen sich erzielen bei stets reiner Zeichnung, allen denkbaren sezessionistischen Gelüsten konnte Rechnung getragen werden und doch

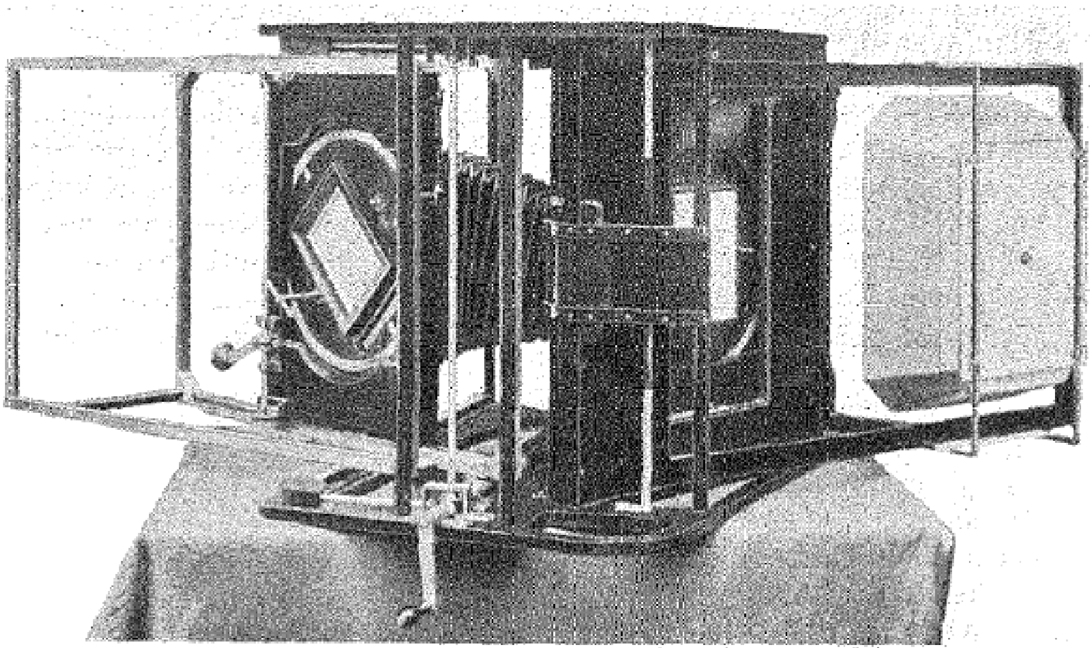


Fig. 3.

blieb ein schönes Muster immer schön und behielt seinen Grundcharakter. Das ist eine Tatsache, die vielleicht nicht unwichtig ist für dekorative Zwecke, für die einheitliche Verwendung eines bestimmten Musters in einem Prachtraume an den verschiedensten Stellen der Wände, bei den Möbeln, Vorhängen usw. (Siehe Tafel I, S. 523.) Vielleicht könnte sich daraus sogar eine neue dekorative Technik entwickeln.

Die nächsten Versuche gingen den umgekehrten Weg. Es wurde nicht mehr verzerrt, sondern Verzogenes zurechtgezogen. Z. B. schiefe und von ungünstigen Standpunkten aus oder mit Weitwinkelobjektiven aufgenommene Architekturen und Interieurs. Zunächst das einfache Aufrichten von Bildern, die mit geneigter Kamera aufgenommen wurden. Das konnte man auch bisher machen, wenn man einen Reproduktionsapparat mit drehbaren Bildwänden zur Verfügung hatte. Jedoch wird meist über-

[1]) Das Versuchsmännchen wurde dick wie ein Bierfaß, dünn wie eine Telegraphenstange, erhielt einen großen Kopf und kleine Füße, einen kleinen Kopf und große Füße, wurde nach Bedarf Zwerg und Riese, ja veränderte selbst seine Körperstellung und verschob seinen Hut.

sehen, daß die schiefe Aufnahme nicht bloß eine Konvergenz der Vertikalen, sondern auch eine Verkürzung bedingt und letztere entweder gar nicht oder nicht richtig korrigiert. Es besteht aber zwischen dem schief aufgenommenen Original und der aufgerichteten Reproduktion eine ganz bestimmte eindeutige mathematische Beziehung, auf welche Rücksicht genommen werden muß, wenn das aufgerichtete Bild gut wirken soll. Hierfür sind bei den normalen Reproduktionsapparaten des Handels, auch denen mit drehbaren Bildwänden, gar keine Behelfe vorgesehen. Der Photoperspektograph gestattet dagegen nicht nur die genaueste Erfüllung dieser mathematischen Bedingung, sondern er zwingt vermöge seiner Konstruktion geradezu dazu. (Siehe Tafel II, S. 524.)

Eine andere Erscheinung, die z. B. bei Interieurs von Kirchen unter Gewölben etc. etc. eintritt, wo man den Standpunkt nicht genügend entfernt wählen kann, ist die unnatürliche Perspektive der Randpartien der Bilder, die eigentlich immer vorhanden ist, aber besonders bei Weitwinkelaufnahmen störend wirkt. Gewölbe, Fußboden und Seitenwände wachsen auf Kosten der Bildmitte ins Unnatürliche. Das ist eigentlich auf die Verschiedenheit des Baues unseres Auges mit der photographischen Kamera zurückzuführen, die sich, wenn schon aus gar nichts anderem, schon dadurch ergibt, daß die Netzhaut unseres Auges kugelig gewölbt ist, und zwar wahrscheinlich nahezu konzentrisch zum zweiten Hauptpunkt des durch Linse und Glaskörper repräsentierten optischen Systems, wogegen, wie schon gezeigt, Photographien streng ebene Schnitte von Strahlenbüscheln sind, die vom optischen Mittelpunkte des Objektivs ausgehen.

Es ist klar, daß die Perspektive in beiden Fällen wesentliche Verschiedenheiten aufweisen muß, die von uns um so störender empfunden werden, je größer die Winkel sind, welche das photographische Bild auf einmal umfaßt, während sie das menschliche Auge nur vermöge seiner Beweglichkeit und durch die Drehung des Kopfes seines Besitzers nacheinander überblicken kann und wir selbe nur durch unser Erinnerungs- und Vorstellungsvermögen zu einem Gesamteindruck vereinigen können.

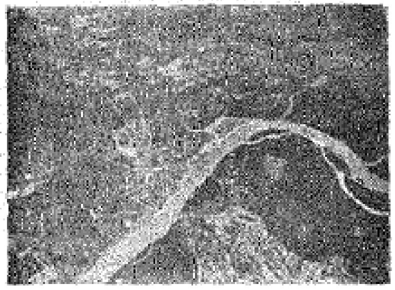
In solchen Fällen kann man mit Hilfe des Photoperspektographen, allerdings mit einem ziemlichen Aufwand von Mühe, der sich nur bei sehr wertvollen Bildern lohnen würde, die Perspektive verbessern, indem man die Bilder auf einen scheinbar entfernteren Standpunkt reduziert und dadurch dem Eindruck nahe bringt, welchen wir bei der Betrachtung desselben Objektes mit freiem Auge hätten. Diesbezügliche Versuche wurden gemacht, konnten aber leider bis zur Ausstellung nicht abgeschlossen werden.

Anhang.

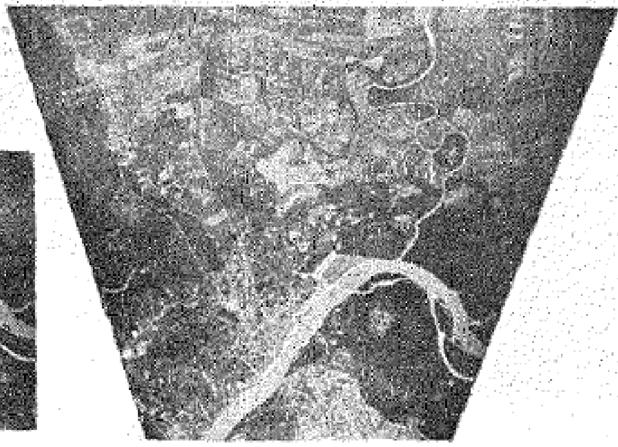
Beweis der Lehrsätze der schiefen Transformation.

Der Beweis kann doppelt geführt werden. Zuerst durch einfache Überlegung:

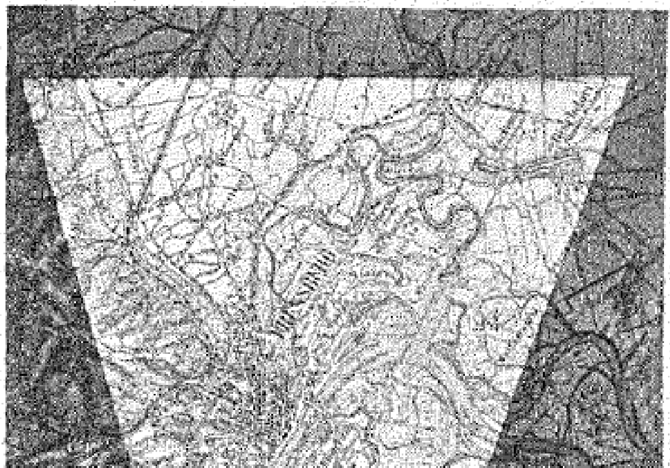
I. Bezeichnet man die senkrechten Abstände eines Originalpunktes von der Objektivebene mit a, von der optischen Achse mit m, die Abstände des korrespondierenden Bildpunktes von der Objektivebene mit b, von der optischen Achse mit n, so besteht bekanntlich die Proportion $a : b = m : n$, daraus folgt aber auch $a : m = b : n$. Ist nun das Verhältnis $a : m$ linear, weil das Original eben ist, so muß auch das Verhältnis $b : n$ linear sein, d. h. auch die Abbildung ist eben.



Aufnahme von Dr. Schlein aus zirka 6900 m Höhe mit rund 44° Neigung.



Transformation in die Horizontalebene.

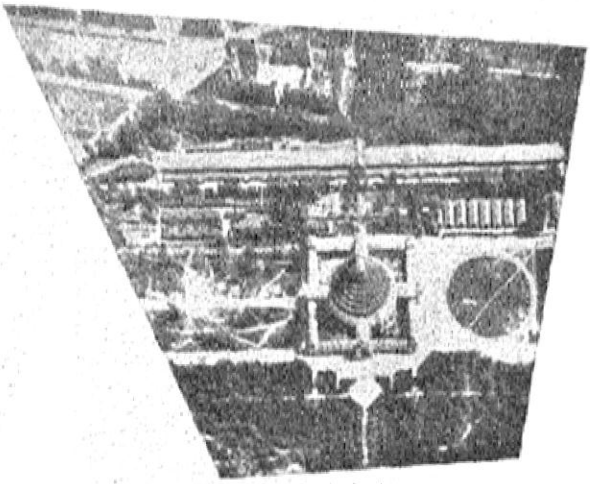


Korrespondierender Ausschnitt aus der Spezialkarte.

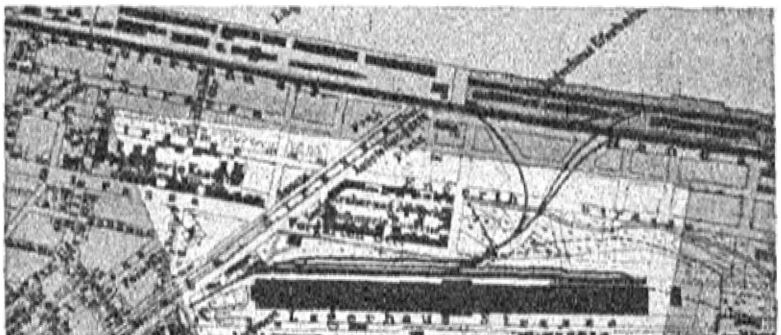
Preßburg von Südwesten.

Tafel III zu Scheimpflug: Der Photoperspektograph und seine Anwendung.

Ballonaufnahme von Dr. Schlein aus einer Höhe von zirka 700 m mit rund 45° Neigung.



Transformation in die Horizontalebene.



Korrespondierender Ausschnitt aus dem neuesten Stadtplan.

Die Rotunde in Wien.

Tafel IV zu Scheimpflug: Der Photoperspektograph und seine Anwendung.

II. Setzt man in der allgemeinen Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $a = 0$, also $\frac{1}{a} = \infty$, so muß, weil f als Brennweite einen bestimmten endlichen Wert hat, auch $\frac{1}{b} = -\infty$, respektive $b = 0$ sein. Ferner lehrt uns die Gaußsche Linsentheorie (bei Vernachlässigung des Begriffes der Hauptpunkte), daß die einzelnen Elemente der Objektivebene sich selbst als Gegenstand und Bild entsprechen; es muß also die Schnittfigur der Ebene des Originals mit der Objektivebene ihr eigenes Bild sein, also auch der Abbildung angehören. Die Schnittfigur von Original und Abbildung heißt in der Perspektive Kollineationsachse.

III. Setzt man in der Linsengleichung $a = f$, so wird $\frac{1}{b} = 0$, also $b = \infty$, d. h. die Schnittgerade der Ebene des Originals mit der Brennebene bildet sich in der Unendlichkeit ab, denn das liegt im Begriff der Brennebene. Eine Ebene, welche durch besagte Schnittgerade des Originals mit der Brennebene und durch den optischen Mittelpunkt geht, ist also zur Abbildung parallel und entspricht damit der Definition der Gegenebene, und ihr Schnitt mit der Bildebene der Definition der Gegenachse, wie selbe von der Perspektive gegeben werden.

Zweite Beweisführung, analytisch.

Denkt man sich ein räumliches rechtwinkeliges Koordinatensystem, den optischen Mittelpunkt als Koordinatenursprung, die Objektivebene als x y-Ebene, die optische Achse als z-Achse, so lautet die allgemeine Gleichung der beliebig im Raume gelegenen Ebene des Originals

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Lege ich die y-Achse, deren Wahl mir noch freisteht, so, daß sie parallel zur Schnittgeraden der Ebene des Originals mit der Objektivebene verläuft, so vereinfacht sich obige Gleichung zu dem Ausdruck:

$$Ax + Cz + D = 0.$$

Dieser Ausdruck, die allgemeine Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z} + \frac{1}{(-z')}$$

und die Proportion

$$(-x') : x = (-z') : z$$

ergeben zusammen den geometrischen Ort der Abbildung.

Die Proportion mit der Gleichung der Ebene des Originals kombiniert, ergeben:

$$A \frac{(-x')z}{(-z')} + Cz + D = 0$$

$$[A(-x') + C(-z')]z + D(-z') = 0.$$

Dieser Ausdruck mit der allgemeinen Linsengleichung verglichen, ergibt:

$$\frac{A(-x')+C(-z')}{D(-z')}=\frac{1}{z}=\frac{1}{f}-\frac{1}{(-z')}=\frac{(-z')-f}{f(-z')}$$

$$\frac{A(-x')+C(-z')}{D}=\frac{f-(-z')}{f}$$

$$Af(-x')+Cf(-z')=Df-D(-z')$$

$$Af(-x')+(Cf+D)(-z')-Df=0$$

oder

$$\mathfrak{A}x'+\mathfrak{B}z'+\mathfrak{D}=0.$$

Also wieder die Gleichung einer Ebene parallel zur y-Achse.

Setze ich jetzt

$$z=(-z')=0$$

so wird aus

$$Ax+Cz+D=0 \qquad Ax+D=0 \qquad x=-\frac{D}{A}$$

und aus

$$Af(-x')+(Cf+D)(-z')-Df=0,\ A(-x')-D=0 \quad -x'=+\frac{D}{A},$$

das heißt

$$x=x'=-\frac{D}{A}.$$

Das heißt, die Abbildung ist nicht nur eben und parallel zur y-Achse, sondern sie schneidet auch die Objektivebene in derselben Geraden wie die Ebene des Originals.

Legt man weiter durch den Ursprung, d. h. den optischen Mittelpunkt, respektive das Projektionszentrum die Gegenebenen parallel zu den Bildebenen, so lauten deren Gleichungen:

Ebene des Originals I	Ebene der Abbildung II
$Ax+Cz+D=0.$	$Af(-x')+(Cf+D)(-z')-Df=0.$
Die zum Original parallele Gegenebene II'	Die zur Abbildung parallele Gegenebene I'
$k(Ax+Cz)=0.$	$l[Af(-x')+(Cf+D)(-z')]=0.$

Setzt man in der Ebene des Originals I

$$z=+f$$

so erhält man

$$Ax+Cf+D=0$$

$$x=-\frac{C}{A}f-\frac{D}{A}.$$

Desgleichen in der Gegenebene I'

$$z'=+f$$

$$l[Af(-x')+(Cf+D)(-f)]=0$$

$$x'=-\frac{C}{A}f-\frac{D}{A}$$

d. h. die Schnittgeraden von I und I' mit der ersten Brennebene fallen zusammen.

Setzen wir weiters in der Ebene der Abbildung II

$$z' = -f$$

$$Af(-x') + (Cf + D)(+f) - Df = 0$$

$$A(-x') + Cf + D - D = 0$$

$$x' = +\frac{C}{A} f.$$

Setzt man endlich in der Gegenebene II'

$$z = -f$$

$$k(Ax - Cf) = 0$$

$$x = +\frac{C}{A} f$$

d. h. die Schnittgeraden von II und II' mit der zweiten Brennebene fallen zusammen.